

Estabilidad de soluciones periódicas de sistemas diferenciales con retardos temporales: Método de semidiscretización

Franco S. Gentile^{†,‡}, Griselda R. Itovich^{*}, Jorge L. Moiola^{‡,*}

[†] Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur

[‡] Instituto de Investigaciones en Ingeniería Eléctrica - IIIE “Alfredo Desages” (UNS-CONICET)

^{*} Escuela de Producción, Tecnología y Medio Ambiente, Sede Alto Valle y Valle Medio, Universidad Nacional de Río Negro

^{*} Departamento de Ingeniería Eléctrica y de Computadoras, Universidad Nacional del Sur

XVII Congreso Dr. Antonio Monteiro
8 de junio de 2023



Contenido

- ▷ Estabilidad de sistemas con retardos
- ▷ El método en Frecuencia (MF)
- ▷ El método de semidiscretización (MSD)
- ▷ Estudio de ejemplos combinando el MF y el MSD.
- ▷ Conclusiones



Estabilidad de sistemas con retardos

Se estudia la ecuación retardada

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - \tau); \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\tau \in \mathbb{R}^+, \quad \mu \in \mathbb{R}^p$$

Ecuación linealizada

$$\dot{y} = D_0 y(t) + D_1 y(t - \tau)$$

$$D_0 = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x^*}, \quad D_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x(t-\tau)} \right|_{x=x^*}$$

Punto de equilibrio

$$0 = f(x^*, x^*; \mu)$$

Estabilidad del punto de equilibrio $x^* \longrightarrow$

Ecuación característica

$$|\lambda I_n - D_0 - D_1 e^{-\lambda \tau}| = 0$$



Estabilidad de sistemas con retardos

Se estudia la ecuación retardada

$$\dot{x} = f(x(t), x(t - \tau); \mu), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\tau \in \mathbb{R}^+, \quad \mu \in \mathbb{R}^p$$

Ecuación linealizada

$$\dot{y} = D_0(t)y(t) + D_1(t)y(t - \tau)$$

$$D_0(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\tilde{x}}, \quad D_1(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial x(t-\tau)} \right|_{x=\tilde{x}}$$

Solución periódica

$$\tilde{x} = f(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t - \tau); \mu)$$

$$\tilde{x}(t + T) = \tilde{x}(t)$$

Estabilidad de la solución periódica $\tilde{x} \longrightarrow$

Operador de monodromía

U es infinito-dimensional
El espectro $\sigma(U)$ determina
la estabilidad de \tilde{x}



El Método en Frecuencia (MF)

Sistema realimentado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu, \\ y &= y(t) = -Cx(t), \\ u &= g(y(t), y(t - \tau); \mu) = g(y^*(t); \mu)\end{aligned}$$

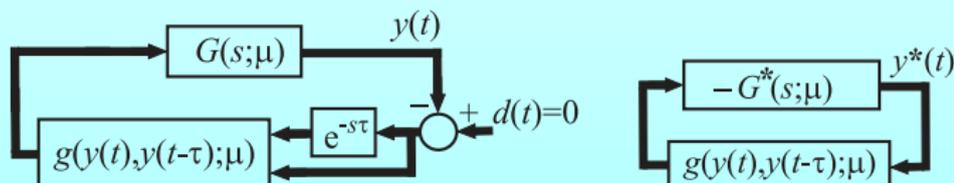
Salida

$$y^*(t) = [y(t) \quad y(t - \tau)]$$

A es $n \times n$, B es $n \times p$
y C es $m \times n$.

Subsistema lineal

$$G(s; \mu) = C [sI_n - A_0 - A_1 e^{-s\tau}]^{-1} B$$



Matriz extendida

$$G^*(s; \mu) = \begin{bmatrix} I_m \\ I_m e^{-s\tau} \end{bmatrix} G(s; \mu)$$



El Método en Frecuencia (MF)

Sistema realimentado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu, \\ y &= y(t) = -Cx(t), \\ u &= g(y(t), y(t - \tau); \mu) = g(y^*(t); \mu)\end{aligned}$$

Subsistema lineal

$$G(s; \mu) = C [sI_n - A_0 - A_1 e^{-s\tau}]^{-1} B$$

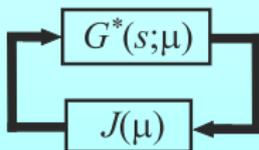
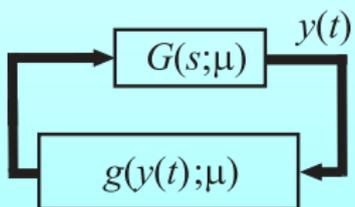
Salida

$$y^*(t) = [y(t) \quad y(t - \tau)]$$

A es $n \times n$, B es $n \times p$
y C es $m \times n$.

Consideramos el caso

$$p = m = 1 \text{ y } g = g(y(t); \mu)$$



Linealización

$$J(\mu) = \partial g(y(t); \mu) / \partial y|_{y=y_{eq}}$$

El Método en Frecuencia (MF)

Sistema realimentado

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_0 x(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu, \\ y &= y(t) = -Cx(t), \\ u &= g(y(t), y(t - \tau); \mu) = g(y^*(t); \mu)\end{aligned}$$

Salida

$$y^*(t) = [y(t) \quad y(t - \tau)]$$

A es $n \times n$, B es $n \times p$
y C es $m \times n$.

Subsistema lineal

$$G(s; \mu) = C [sI_n - A_0 - A_1 e^{-s\tau}]^{-1} B$$

Consideramos el caso

$$p = m = 1 \text{ y } g = g(y(t); \mu)$$

Teorema gráfico de bifurcación de Hopf

- ▷ $\lambda := G(s)J$ toma el valor -1 para $s = i\omega_0, \omega_0 \neq 0$, cuando $\tau = \tau_0$ y $\mu = \mu_0$, con $J = \partial g / \partial y|_{y=y^*}$
 - ▷ Se cumplen condiciones de no-degeneración.
- ⇒ Nace una órbita periódica a partir de un punto de equilibrio.

Más detalles de la formulación general: F. S. Gentile, J. L. Moiola and G. R. Chen, Frequency-Domain Approach to Hopf Bifurcation Analysis: Continuous Time-delay Systems. World Scientific, Singapore, 2019.



Aproximación de las órbitas

Lugar geométrico del autovalor y de la amplitud

$$\lambda(i\omega; \mu) = G(i\omega; \mu)J(\mu) = -1 + \xi_1\theta^2$$

θ es un parámetro que representa la amplitud

$$\xi_1(i\omega) = -G(i\omega; \mu) \left\{ D_2(V_{02} + \frac{1}{2}V_{22}) + \frac{1}{8}D_3 \right\}$$

$$D_2 = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Big|_{y=y^*}, \quad D_3 = \frac{\partial^3 g}{\partial y^3} \Big|_{y=y^*}$$

$$V_{02} = -\frac{1}{4}H(0)D_2, \quad V_{22} = -\frac{1}{4}H(2i\omega)D_2$$

$$H(s) = (1 + G(s)J)^{-1} G(s)$$

$$y = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=0}^2 Y^k \exp(ik\omega t) \right\}$$

$$Y^0 = V_{02}\theta^2, \quad Y^1 = \theta, \quad Y^2 = V_{22}\theta^2$$

Coefficiente de estabilidad

$$\sigma = \operatorname{Re} \left(\frac{\xi_1(i\omega)}{G'(i\omega)J} \right)$$

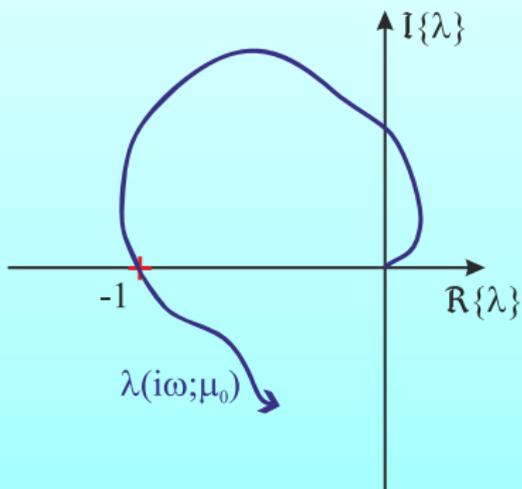


Aproximación de las órbitas

Lugar geométrico del autovalor y de la amplitud

$$\lambda(i\omega; \mu) = G(i\omega; \mu)J(\mu) = -1 + \xi_1\theta^2$$

θ es un parámetro que representa la amplitud

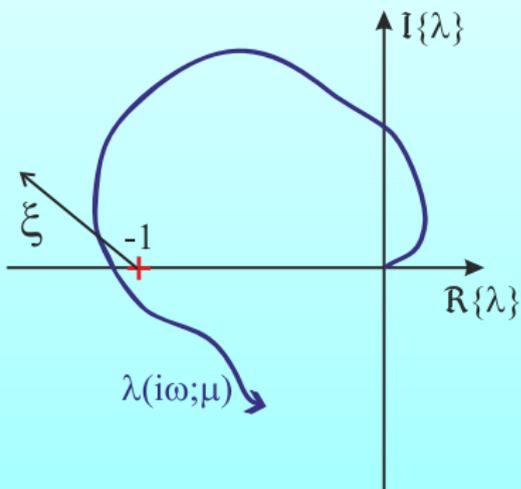


Aproximación de las órbitas

Lugar geométrico del autovalor y de la amplitud

$$\lambda(i\omega; \mu) = G(i\omega; \mu)J(\mu) = -1 + \xi_1\theta^2$$

θ es un parámetro que representa la amplitud

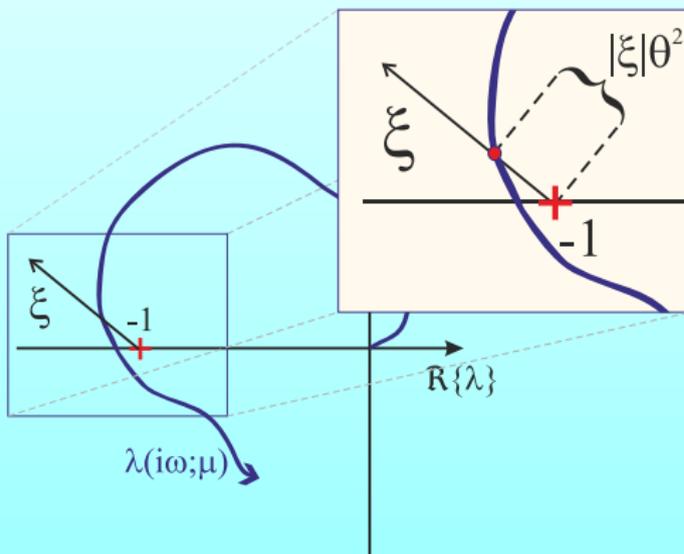


Aproximación de las órbitas

Lugar geométrico del autovalor y de la amplitud

$$\lambda(i\omega; \mu) = G(i\omega; \mu)J(\mu) = -1 + \xi_1\theta^2$$

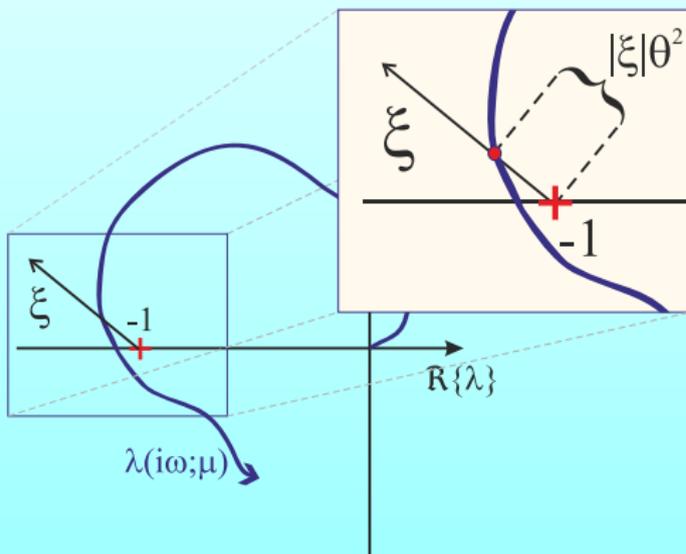
θ es un parámetro que representa la amplitud



Aproximación de las órbitas

Balances armónicos de alto orden

$$\lambda(i\omega; \mu) = -1 + \xi_1\theta^2 + \xi_2\theta^4 + \xi_3\theta^6 + \dots$$



El Método de Semidiscretización

Consideramos la ecuación

$$\dot{y} = A(t, \mu)y + B(t, \mu)y(t - \tau), \quad t \in [0, T]$$

Ecuación semidiscretizada

$$\dot{y}(t) = A_i y(t) + B_i (\beta_{i,0} y(t_{i-r}) + \beta_{i,1} y(t_{i+1-r}))$$

Sistema discreto

$$y_{i+1} = P_i y_i + R_{i,0} y_{i-r} + R_{i,1} y_{i+1-r}$$

Partición del intervalo

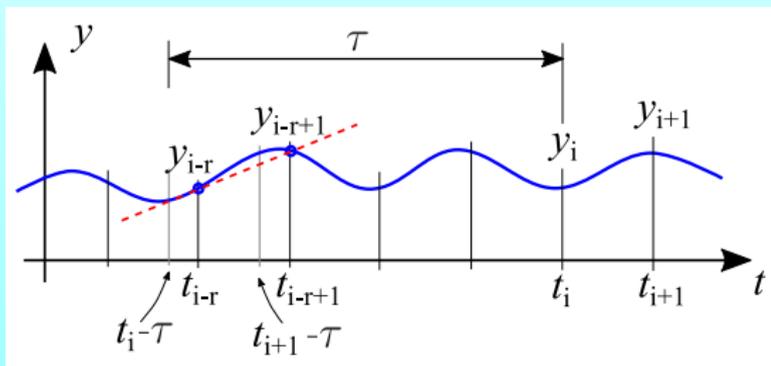
$$[0, T] = \bigcup_{i=0}^{p-1} [t_i, t_{i+1}]$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad r = \left[\frac{\tau}{h} + \frac{1}{2} \right]$$

$$A_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) ds,$$

$$B_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) ds$$

$$h = T/p$$



El Método de Semidiscretización

Consideramos la ecuación

$$\dot{y} = A(t, \mu)y + B(t, \mu)y(t - \tau), \quad t \in [0, T]$$

Ecuación semidiscretizada

$$\dot{y}(t) = A_i y(t) + B_i (\beta_{i,0} y(t_{i-r}) + \beta_{i,1} y(t_{i+1-r}))$$

Sistema discreto

$$y_{i+1} = P_i y_i + R_{i,0} y_{i-r} + R_{i,1} y_{i+1-r}$$

$$z_{i+1} = G_i z_i$$

$$z_i = (y_i \ y_{i-1} \ y_{i-2} \ \dots \ y_{i+1-r} \ y_{i-r})$$

$$G_i = \begin{bmatrix} P_i & 0 & \dots & \dots & R_{i,1} & R_{i,0} \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Partición del intervalo

$$[0, T] = \cup_{i=0}^{p-1} [t_i, t_{i+1}]$$

$$t \in [t_i, t_{i+1}], \quad r = \left[\frac{\tau}{h} + \frac{1}{2} \right]$$

$$A_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} A(s) ds,$$

$$B_i = \frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_{i+1}} B(s) ds$$

$$h = T/p$$



El Método de Semidiscretización

Consideramos la ecuación

$$\dot{y} = A(t, \mu)y + B(t, \mu)y(t - \tau), \quad t \in [0, T]$$

Ecuación semidiscretizada

$$\dot{y}(t) = A_i y(t) + B_i (\beta_{i,0} y(t_{i-r}) + \beta_{i,1} y(t_{i+1-r}))$$

Sistema discreto

$$y_{i+1} = P_i y_i + R_{i,0} y_{i-r} + R_{i,1} y_{i+1-r}$$

$$z_{i+1} = G_i z_i$$

$$z_i = (y_i \ y_{i-1} \ y_{i-2} \ \dots \ y_{i+1-r} \ y_{i-r})$$

$$z_p = \Phi z_0$$

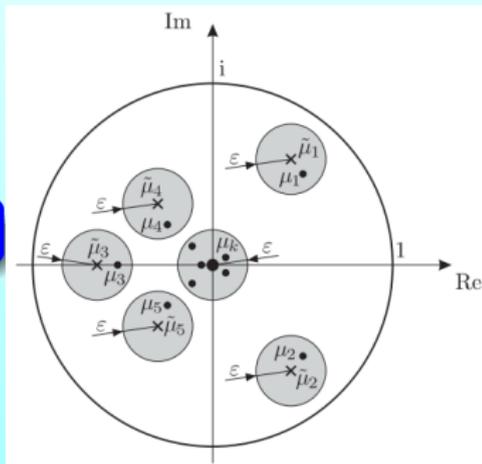
Aproximación matricial del
operador de monodromía

$$\Phi = G_{p-1} G_{p-2} \dots G_0$$

Más detalles en: T. Insperger and G. Stépán, Semi-Discretization for Time-Delay Systems: Stability and Engineering Applications. Springer Science+Business Media, Applied Mathematical Sciences Vol. 178, 2011.

Partición del intervalo

$$[0, T] = \cup_{i=0}^{p-1} [t_i, t_{i+1}]$$



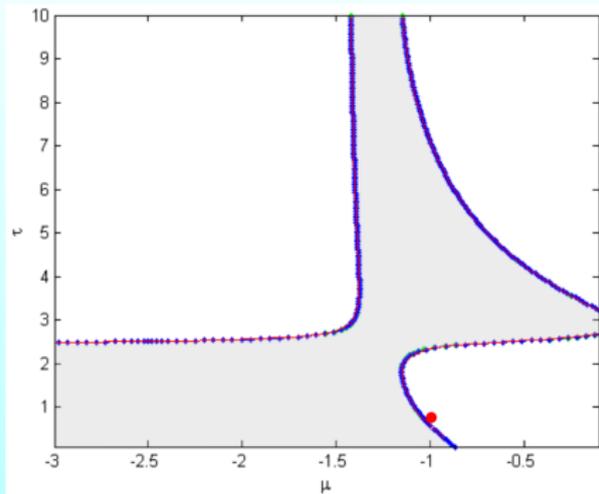
Ejemplo 1: Sistema de Tesi controlado por retardo

Sistema de Tesi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 1.2x_2 + \mu x_3 + x_1^2 + \Delta_\tau(x_1),\end{aligned}$$

Control de Pyragas

$$\Delta_\tau(x_1) = k[x_1(t) - x_1(t - \tau)]$$

Ciclo para $\mu = -1$, $\tau = 0.5$  $k = 0.5$

Balances	θ	ω	Mult.1	Mult.2
BA2	0.2757	0.8666	1.0101	0.7881
BA4	0.2721	0.8669	1.0084	0.7951
BA6	0.2718	0.8669	1.0084	0.7955
Dde-Biftool	0.2705	0.8677	1.0000	0.8049

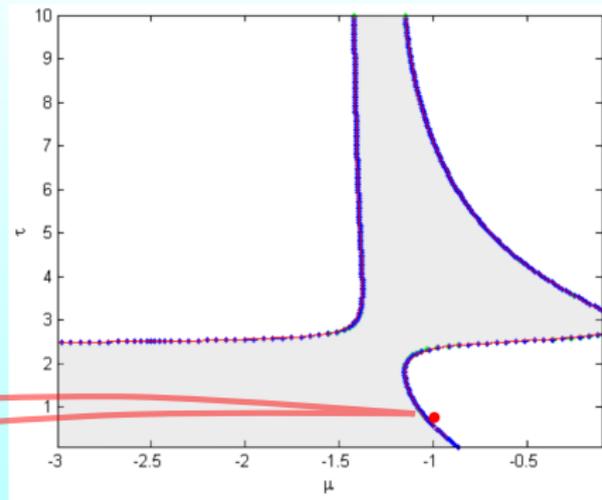
Ejemplo 1: Sistema de Tesi controlado por retardo

Sistema de Tesi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - 1.2x_2 + \mu x_3 + x_1^2 + \Delta_\tau(x_1),\end{aligned}$$

Control de Pyragas

$$\Delta_\tau(x_1) = k[x_1(t) - x_1(t - \tau)]$$

Ciclo para $\mu = -1$, $\tau = 0.5$  $k = 0.5$

Balances	θ	ω	Mult.1	Mult.2
BA2	0.2757	0.8666	1.0101	0.7881
BA4	0.2721	0.8669	1.0084	0.7951
BA6	0.2718	0.8669	1.0084	0.7955
Dde-Biftool	0.2705	0.8677	1.0000	0.8049

Ejemplo 2: Sistema de Campbell-Leblanc

Modelo de Campbell-Leblanc

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \frac{5}{2}x_2 + Ax_{2\tau} + Bx_{2\tau}^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1,\end{aligned}$$

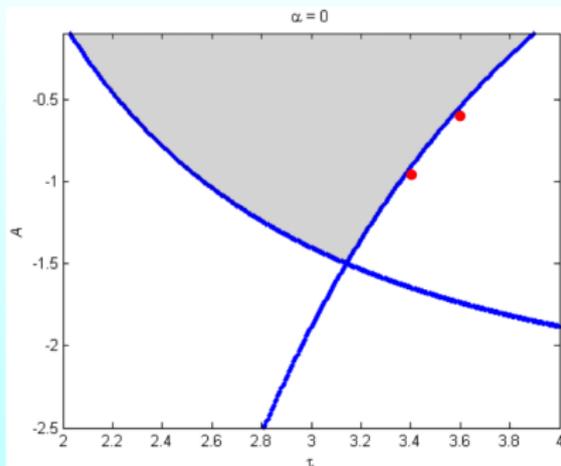
Ciclo para $\tau = 3.4$, $A = -0.9151$, $\omega_0 = 1.848$

Determinación de doble período

	A	Mult.	θ
BA2	-1.1130	0.9969	1.0385
BA4	-1.1205	1	1.0333
Dde-Biftool	-1.1207	1	1.0549

Determinación de Neimark-Sacker

	A	Mult.	θ
BA2	-0.9830	0.9845	1.5304
BA4	-1.0325	1.0063	1.5390
Dde-Biftool	-1.0352	1	1.5469

Ciclo para $\tau = 3.6$, $A = -0.5462$,
 $\omega_0 = 1.7453$

Ejemplo 2: Sistema de Campbell-Leblanc

Modelo de Campbell-Leblanc

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_1 - \frac{5}{2}x_2 + Ax_{2\tau} + Bx_{2\tau}^2, \\ \dot{x}_2 &= x_1,\end{aligned}$$

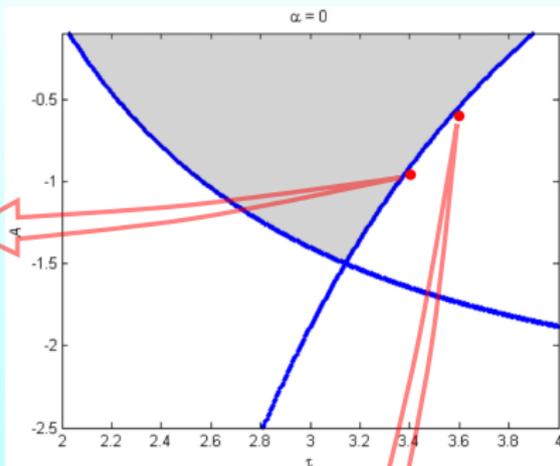
Ciclo para $\tau = 3.4$, $A = -0.9151$, $\omega_0 = 1.848$

Determinación de doble período

	A	Mult.	θ
BA2	-1.1130	0.9969	1.0385
BA4	-1.1205	1	1.0333
Dde-Biftool	-1.1207	1	1.0549

Determinación de Neimark-Sacker

	A	Mult.	θ
BA2	-0.9830	0.9845	1.5304
BA4	-1.0325	1.0063	1.5390
Dde-Biftool	-1.0352	1	1.5469

Ciclo para $\tau = 3.6$, $A = -0.5462$,
 $\omega_0 = 1.7453$

Comentarios finales

- La combinación del método en frecuencia (MF) con el método de semidiscretización (MSD) simplifica enormemente el tratamiento de estabilidad de puntos de equilibrio en sistemas con retardos.
- También, la estabilidad de las órbitas periódicas se obtuvo combinando ambos métodos, pues se utiliza la expresión aproximada de las órbitas obtenida con el MF para obtener la solución del sistema semidiscretizado.
- Los fenómenos dinámicos globales, como por ejemplo bifurcaciones de doble período o Neimark-Sacker, pueden detectarse con diferentes exactitudes, dependiendo del orden del balance empleado.
- Se buscará aplicar la combinación del MF y el MSD para el estudio de sistemas neutrales.

Referencias

- T. Insperger and G. Stépán, Semi-Discretization for Time-Delay Systems: Stability and Engineering Applications. Springer Science+Business Media, Applied Mathematical Sciences Vol. 178, 2011.
- F. Hartung, T. Insperger, G. Stépán and J. Turi, "Approximate stability charts for milling processes using semi-discretization," Applied Mathematics and Computations 174, pp. 51-73, 2006.



¡Muchas gracias!

